# Teoria do Risco
# Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

# Modelos de Risco

- No contexto da teoria do Risco aplicada, há questões de importância central e de grande implicância para um segurador, das quais destacam-se as seguintes:

  - Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?

  - Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma dada margem de segurança?

# Modelos de Risco

- ...A teoria do risco busca estabelecer um modelo de tarifação eficiente para a seguradora frente aos sinistros.

  - Modelo de Risco Individual Anual.

  - Modelo de Risco Coletivo Anual

# Modelo de Risco Individual

- O modelo de Risco individual estabelece um modelo de probabilidade para o valor total das indenizações de uma carteira,
  - Baseado na soma das diferentes distribuições dos sinistros individuais no intuito de se obter uma distribuição de probabilidades para os danos agregados.

# Modelo de Risco Individual

- Para fins de simplificação deste modelo é estabelecida as seguintes premissas:

  - Em cada **apólice** ocorrerá somente um **sinistro** no ano de avaliação.

  - A ocorrência de um sinistro não influi em qualquer outro risco do conjunto segurado.

# Modelo de Risco Individual

Este modelo considera que para $i = 1,2,3, \dots, n$ apólices, os sinistros sob forma agregada serão denominados:

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\boldsymbol{S_{ind.}}$ ⇨ Valor total das indenizações na carteira em 1 ano.

$\boldsymbol{X_{is}}$ ⇨ V.a. associada ao sinistro da apólice $i$ em 1 ano (montante de sinistro, sinistralidade da apólice i).

$\boldsymbol{n}$ ⇨ Número fixo de apólices independentes.

# Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

# Modelo de Risco Individual

A relevância do modelo reside fundamentalmente no fato de que as apólices têm abordagens independentes.

$q_i$ ⇨ A probabilidade de ocorrência de um sinistro em um ano de vigência da apólice i.

$B_i$ ⇨ Variável aleatória relativa ao valor da indenização de cada apólice $i$.

# Modelo de Risco Individual

A fim de simplificar os conceitos, $X_i$ será definido como:

$$X_i = I_i B_i$$

em que $I_i$ é uma variável dicotômica indicadora da ocorrência de um sinistro com distribuição $Bernoulli(q_i)$.

$$I_i = \begin{cases} 1, & q_i \\ 0, & 1 - q_i \end{cases}$$

A variável aleatória $B_i$ é definida por $(X_i | I_i = 1)$.

$$E(I_i) = q_i \qquad var(I_i) = q_i(1 - q_i)$$

# Modelo de Risco Individual

Um seguro de veículos cuja cobertura é apenas o furto ou o microsseguro que cobre perdas de pequenos objetos em viagens como malas, máquinas fotográficas entre outros, são exemplos simples para o caso em que $B_i$ assume apenas um único valor.

- Dessa forma também podem-se estabelecer outras relações:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - q & x = 0 \\ q & x = B \end{cases}$$

$$E(X) = Bq \qquad var(X) = B^2 q(1 - q)$$

**EXEMPLO 1**: Calcule o valor do prêmio através do princípio do desvio padrão de um seguro que paga $30000,00 caso o veículo seja furtado. Considere a probabilidade de furto do veículo igual a $0{,}007$ e $\beta = 0{,}7$.

$$\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta.$$

# Solução

$$E(X) = 30000(0{,}007) = \$\,210{,}00$$

$$var(X) = 30000^2(0{,}007)(0{,}993) = \$\,6255900{,}00$$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = \$2501{,}18$$

Logo

$$\Pi_X = 210 + 2501{,}18 \times 0{,}7 = \$1960{,}83$$

# Modelo de Risco Individual

Pode-se estabelecer $S_{ind}$ como:

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i B_i$$

Sendo $P(I_i = 1) = q_i$ e $P(I_i = 0) = 1 - q_i$. Logo:

$$E(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i B_i)$$

$$var(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} var(I_i B_i)$$

No modelo de risco individual, $N$ será definido como:

$$N = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Logo :

$$N \sim Binomial(n, q)$$

$$E(N) = nq$$

$$var(N) = nq(1 - q)$$

**EXEMPLO 2:** Considere que em uma carteira de seguros exista **10000** apólices, onde cada uma possui uma probabilidade de sinistros de **0,01.**

Calcule o número esperado de sinistros em 1 ano e o respectivo desvio padrão.

# SOLUÇÃO

$$N \sim Binomial(10000; 0{,}01)$$

$$E(N) = 10000 \times 0{,}01 = 100$$

$$\sigma_N = \sqrt{10000 \times 0{,}01 \times 0{,}99} \approx 9{,}94$$

- A aproximação da distribuição de $N$ :
  - Distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = nq$ ou
  - Normal com parâmetros $E(N) = nq$ e $var(N) = nq(1-q)$,

para o caso de $n$ suficientemente grande.

**EXEMPLO 3:** Para os dados do exemplo anterior calcule a probabilidade de que em 10000 apólices verificadas ocorra no máximo 120 sinistros. Calcule utilizando o modelo binomial e suas aproximações pelo modelo de Poisson e Normal.

| $N \sim B(n = 10000, q = 0{,}01)$ |
|---|
| $$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \binom{10000}{k} 0{,}01^k (0{,}99)^{10000-k} \approx \mathbf{0,9778855}$$ |
| $N \sim Po(nq = 100)$ |
| $$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \frac{100^{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{-100}}{\mathrm{k}!} \approx \mathbf{0,9773307}$$ |
| $N \sim N(nq = 100, nq(1-q) = 99)$ |
| $$P(N \leq 120) = \int_0^{120} \frac{e^{\frac{(n-100)^2}{198}}}{\sqrt{198\pi}} dn \approx \mathbf{0,9777884}$$ |

# Modelos de risco Individual –A distribuição de $X_i$

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{k=0}^{1} P(X_i \leq x_i, I_i = k)$$

Assim:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i | I = 1)P(I_i = 1) + P(X_i \leq x_i | I_i = 0)P(I_i = 0)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0,\infty)}(x_i)$$

em que $x_i$ corresponde a um possível valor de $X_i$ e representa o valor da indenização paga em caso de ocorrência do sinistro

**EXEMPLO 4:** Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de $10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de $5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Determinar os modelos probabilísticos de $I_i, B_i$ e $X_i$.

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

| $X_1 =$ | | $I_1$ | $B_1$ |
|---|---|---|---|
| \$0,00 | 0,9988 | | |
| \$5000,00 | 0,0002 | | |
| \$10000,00 | 0,001 | | |

$$E(X_1) = 0 \times 0{,}9988 + 5000 \times 0{,}0002 + 10000 \times 0{,}001 = \$11{,}00$$

$$var(X_1) = (0^2 \times 0{,}9988 + 5000^2 \times 0{,}0002 + 10000^2 \times 0{,}001) - 11{,}00^2 = \$^2 104879{,}00$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

| $X_1 =$ | | $I_1$ | | $B_1$ |
|---|---|---|---|---|
| \$0,00 | 0,9988 | 0 | 0,9988 | |
| \$5000,00 | 0,0002 | 1 | 0,0012 | |
| \$10000,00 | 0,001 | | | |

$E(X_1) = \$11,00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0,0012$

$var(X_1) = \$^2 104879,00$

$var(I_1) = 0,0012 \times 0,9988 = 0,001199$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

| $X_1 =$ | | $I_1$ | | $B_1 = X_1 \mid I_1 = 1$ |
|---|---|---|---|---|
| \$0,00 | 0,9988 | 0 | 0,9988 | |
| \$5000,00 | 0,0002 | 1 | 0,0012 | $\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$ |
| \$10000,00 | 0,001 | | | $\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$ |

$\mathrm{E}(X_1) = \$11,00$

$var(X_1) = \$^2 104879,00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0,0012$

$var(I_1) = 0,001199$

$$\mathrm{E}(B_1) = (0,833\ )10000,00 + (0,167\ )5000,00 = \$9166,67$$

$$var(B_1) = [0,833(10000,00)^2 + 0,167(5000,00)^2] - \$9166,67^2 = \$^2 3497768$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

| $X_1 =$ | | $I_1$ | | $B_1 = X_1 \mid I_1 = 1$ |
|---|---|---|---|---|
| \$0,00 | 0,9988 | 0 | 0,9988 | |
| \$5000,00 | 0,0002 | 1 | 0,0012 | $\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$ |
| \$10000,00 | 0,001 | | | $\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$ |

$\mathrm{E}(X_1) = \$11,00$

$var(X_1) = \$^2 104879,00$

$\sigma_{X_1} = \$\, 323,85$

$CV_{X_1} = 29,44$

$\mathrm{E}(\mathrm{I}_1) = 0,0012$

$var(I_1) = 0,001199$

$\sigma_{I_1} = 0,034$

$CV_{I_1} = 0,9991667$

$\mathrm{E}(B_1) = \$9166,67$

$var(B_1) = \$^2 3497768$

$\sigma_{B_1} = \$\, 1870,232$

$CV_{B_1} = 0,2040252$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

| $X_1 =$ | | $I_1$ | | $B_1 = X_1 \| I_1 = 1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| \$0,00 | 0,9988 | 0 | 0,9988 | | |
| \$5000,00 | 0,0002 | 1 | 0,0012 | \$5000,00 | $\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$ |
| \$10000,00 | 0,001 | | | \$10000,00 | $\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$ |

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 0,9988\ , se\ 0 \leq x < 5000 \\ 0,999, se\ 5000 \leq x < 10000 \\ 1, se\ x \geq 10000. \end{cases}$$

$$F_{B_i}(x) = \begin{cases} 0\ , & se\ x < 5000 \\ 0,167, & se\ 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & se\ x \geq 10000 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i) q_i + (1 - q_i) I_{[0,\infty)}(x_i)$$

$$F_{X_i}(x) = \left( \begin{cases} 0\ , & se\ x < 5000 \\ 0,167, & se\ 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & se\ x \geq 10000 \end{cases} \right) 0,0012 + 0,9988 I_{(0,\infty]}(x)$$

**EXEMPLO 5:** Um seguro agrícola cobre toda a perda de uma plantação em caso de geada e seca prolongada. Considerando que esses eventos ocorrem com 1% de probabilidade, e que o valor das indenizações paga pela seguradora seja modelado pela seguinte função de densidade:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 & se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i} & se\ x_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a distribuição de $X_i$, no caso da ocorrência do sinistro (em milhões de reais). Encontre a função de distribuição de $X_i$, obtenha também o modelo probabilístico de $I_i$.

# SOLUÇÃO

Observe que $X_i = 0$ se $I_i = 0$, o que implica que $P(X_i = 0) = P(I_i = 0) = 0{,}99$, e de imediato temos que $I_i \sim Bernoulli(0{,}01)$.

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \int_0^{x_i} 0{,}002e^{-0{,}2z}dz$$

## SOLUÇÃO

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \int_0^{x_i} 0{,}002e^{-0{,}2z}dz$$

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \left[-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{X_i}(x_i) = 1 - 0{,}01e^{-0{,}2x_i}$$

## SOLUÇÃO

A partir das informações dadas no enunciado do exemplo temos que:

$$f_{B_i}(x_i) = f_{X_i|I_i=1}(x_i|I_i = 1) = \frac{f_{X_i,I_i=1}(x_i, I_i = 1)}{P(I_i = 1)}$$

$$f_{B_i}(x_i) = \frac{0{,}002e^{-0{,}2x_i}}{0{,}01} = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, \qquad x_i > 0$$

Assim

$$F_{B_i}(x_i) = \int_0^{x_i} 0{,}2e^{-0{,}2z}dz = \left[-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{B_i}(x_i) = 1 - e^{-0{,}2x_i}$$

$$B_i \sim Exp(0{,}2)$$

# SOLUÇÃO

| $X$ | $I$ | B |
|---|---|---|
| $f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99\,, se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}, se\ x_i > 0 \\ 0\,,\ \ c.c. \end{cases}$ | $P(I_i = 0) = 0{,}99$<br>$P(I_i = 1) = 0{,}01$ | $f_{\mathrm{B}_i}(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, x_i > 0$ |
| $E(X_i) = 0{,}05$<br>$var(X_i) \approx 0{,}4950$ | $E(I_i) = 0{,}01$<br>$var(I_i) = 0{,}0099$ | $E(\mathrm{B}_i) = 5$<br>$var(\mathrm{B}_i) = 25$ |

$$F_{X_i}(x_i) = (1 - e^{-0{,}2x_i})0{,}01 + 0{,}99I_{(0,\infty]}(x_i)$$

# Modelos de risco Individual – A distribuição de $X_i$

É fácil perceber que:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1-q_i)\,, se\ x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), se\ x_i > 0 \end{cases}.$$

Pois,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 \quad ; & (1-0{,}01) & ;\ se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}\ ; & 0{,}01 \times 0{,}2e^{-0{,}2x} & ;\ se\ x_i > 0 \\ \quad 0 & & c.c. \end{cases}$$

# Bibliografia


- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.